



TG 1 Să se calculeze $\operatorname{tg} 135^\circ - \sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$.

$$\operatorname{tg} 135^\circ - \sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

e



TG 2 Să se ordoneze crescător $a = \sin 39^\circ$, $b = \sin 159^\circ$, $c = \cos 63^\circ$.

$$b = \sin 159^\circ = \sin 21^\circ$$

$$c = \cos 63^\circ = \sin 27^\circ$$

$$a = \sin 39^\circ$$

$$b < c < a$$

d



TG 3 Să se afle valoarea produsului

$$(\sin 1^\circ + \cos 179^\circ) \cdot (\sin 2^\circ + \cos 178^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 89^\circ + \cos 91^\circ).$$

$$\begin{aligned} & (\sin 1^\circ + \cos 179^\circ) \cdot (\sin 2^\circ + \cos 178^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 89^\circ + \cos 91^\circ) = \\ & = (\sin 1^\circ - \cos 1^\circ) \cdot (\sin 2^\circ - \cos 2^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 45^\circ - \cos 45^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 89^\circ - \cos 89^\circ) = \\ & = (\sin 1^\circ - \cos 1^\circ) \cdot (\sin 2^\circ - \cos 2^\circ) \cdot \dots \cdot 0 \cdot \dots \cdot (\sin 89^\circ - \cos 89^\circ) = 0 \end{aligned}$$



TG 4 Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \cos 10^\circ + \cos^2 20^\circ + 4 \cos 15^\circ \cos 75^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos 170^\circ.$$

$$\begin{aligned} E &= \cos 10^\circ + \cos^2 20^\circ + 4 \cos 15^\circ \cos 75^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos 170^\circ = \\ &= 2 \cos \frac{10^\circ + 170^\circ}{2} \cos \frac{10^\circ - 170^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 40^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 140^\circ}{2} + 4 \frac{\cos(15^\circ - 75^\circ) + \cos(15^\circ + 75^\circ)}{2} = \\ &= 1 + \frac{2 \cos \frac{40^\circ + 140^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ - 140^\circ}{2}}{2} + 2[\cos 60^\circ + \cos 90^\circ] = \\ &= 1 + \cos 90^\circ \cdot \cos 50^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

d



TG 5 * Să se calculeze $\cos 18^\circ \cdot (\operatorname{tg} 36^\circ + \operatorname{ctg} 36^\circ)$.

$$\begin{aligned}\cos 18^\circ \cdot (\operatorname{tg} 36^\circ + \operatorname{ctg} 36^\circ) &= \cos 18^\circ \left(\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} + \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} \right) = \cos 18^\circ \frac{\sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ}{\sin 36^\circ \cos 36^\circ} = \\ &= \frac{2 \cos 18^\circ}{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ} = \frac{2 \cos 18^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{2 \sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = 2\end{aligned}$$

b



TG 6 Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8}$.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8}$$

$$2\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} = 2 \cos \frac{\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8}}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}}{2} = -2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{8} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{8} =$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

b



TG 7 * Fie $E = \cos(a - b) \cos(a + b)$. Atunci:

$$\begin{aligned} E &= \cos(a - b) \cdot \cos(a + b) = \frac{\cos(a - b - a - b) + \cos(a - b + a + b)}{2} = \frac{\cos 2b + \cos 2a}{2} = \\ &= \frac{2 \cos^2 b - 1 + 2 \cos^2 a - 1}{2} = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \cos^2 a - \cos^2 b \end{aligned}$$

f



TG 8 Să se calculeze $E = \cos^8 \frac{5\pi}{12} - \cos^8 \frac{\pi}{12}$.

$$E = \cos^8 \frac{5\pi}{12} - \cos^8 \frac{\pi}{12} = \frac{97 - 56\sqrt{3}}{256} - \frac{97 + 56\sqrt{3}}{256} = -\frac{112\sqrt{3}}{256} = -\frac{28\sqrt{3}}{64} = -\frac{7\sqrt{3}}{16}$$

C

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = 2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\cos^4 \frac{\pi}{12} = \frac{4 + 4\sqrt{3} + 3}{16}$$

$$\cos^4 \frac{\pi}{12} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{16}$$

$$\cos^8 \frac{\pi}{12} = \frac{49 + 56\sqrt{3} + 48}{256} \Rightarrow \cos^8 \frac{\pi}{12} = \frac{97 + 56\sqrt{3}}{256}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = 2\cos^2 \frac{5\pi}{12} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{5\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\cos^4 \frac{5\pi}{12} = \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{16}$$

$$\cos^4 \frac{5\pi}{12} = \frac{74\sqrt{3}}{16}$$

$$\cos^8 \frac{5\pi}{12} = \frac{49 - 56\sqrt{3} + 48}{256} \Rightarrow \cos^8 \frac{5\pi}{12} = \frac{97 - 56\sqrt{3}}{256}$$



TG 9 * Să se calculeze valoarea expresiei $E = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \dots + \sin \frac{2013\pi}{3}$.

$$E = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \dots + \sin \frac{2013\pi}{3}$$

$$E \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \dots + \sin \frac{2013\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$$

$$E \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})}{2} + \frac{\cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3})}{2} + \dots + \frac{\cos(\frac{2013\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{2013\pi}{3} + \frac{\pi}{3})}{2}$$

$$2E \cdot \sin \frac{\pi}{3} = (\cos \frac{0\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3}) + (\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{3\pi}{3}) + (\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3}) + \dots + (\cos \frac{2012\pi}{3} - \cos \frac{2014\pi}{3})$$

$$2E \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}$$

$$2E \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$E = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$



$$\cos \frac{2013\pi}{3} = \cos \frac{3 \cdot 2\pi \cdot 335 + 3\pi}{3} = \cos \frac{3\pi}{3} = \cos \pi = -1$$

$$\cos \frac{2014\pi}{3} = \cos \frac{3 \cdot 2\pi \cdot 335 + 4\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$



TG 10 * Să se calculeze $\operatorname{tg} x$ știind că x este un unghi obtuz, iar $\sin x = \frac{3}{5}$.

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \operatorname{tg} x < 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\frac{25}{16} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\frac{9}{16} = \operatorname{tg}^2 x$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$$

a



TG 11 * Să se afle măsura unghiului ascuțit x știind că

$$\frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\cos x} = 5 \operatorname{tg} x.$$

$$\frac{2 \sin x + 3 \cos x}{\cos x} = 5 \operatorname{tg} x$$

$$2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 3 = 5 \operatorname{tg} x$$

$$2 \operatorname{tg} x + 3 = 5 \operatorname{tg} x$$

$$3 = 3 \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = 45^\circ$$

d



TG 12 * Pentru ce unghi este adevărată relația $\operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$?

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x = \cos x - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \cos x$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

b



TG 13 * Să se calculeze $E = \frac{5 \sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$, dacă $\operatorname{ctg} x = 3$.

$$E = \frac{5 \sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} = \frac{5 - \frac{\cos x}{\sin x}}{1 + 2 \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{5 - \operatorname{ctg} x}{1 + 2 \operatorname{ctg} x} = \frac{5 - 3}{1 + 2 \cdot 3} = \frac{2}{7}$$

b



TG 14 Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x = -2$. Să se calculeze $\cos x$.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 4 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 5 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

a



TG 15 * Să se stabilească valoarea produsului

$$P = \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ.$$

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 35^\circ \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{(\sin 15^\circ \sin 75^\circ)(\sin 35^\circ \sin 55^\circ)}{(\cos 15^\circ \cos 75^\circ)(\cos 35^\circ \cos 55^\circ)} = \\ &= \frac{\frac{\cos(15^\circ - 75^\circ) - \cos(15^\circ + 75^\circ)}{2}}{\frac{\cos(15^\circ - 75^\circ) + \cos(15^\circ + 75^\circ)}{2}} \cdot \frac{\frac{\cos(35^\circ - 55^\circ) - \cos(35^\circ + 55^\circ)}{2}}{\frac{\cos(35^\circ - 55^\circ) + \cos(35^\circ + 55^\circ)}{2}} = \\ &= \frac{\cos 60^\circ - \cos 90^\circ}{\cos 60^\circ + \cos 90^\circ} \cdot \frac{\cos 20^\circ - \cos 90^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 90^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cos 20^\circ}{\frac{1}{2} \cos 20^\circ} = 1 \end{aligned}$$



TG 16 * Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca $\sin x = \frac{1}{3}$. Să se calculeze $\cos \frac{x}{2}$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}} &= \sqrt{\frac{18 - 12\sqrt{2}}{36}} = \\ &= \frac{\sqrt{12 - 12\sqrt{2} + 6}}{6} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{6})^2}}{6} = \\ &= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$



TG 17 * Să se determine toate valorile parametrului real m pentru care este posibilă egalitatea $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = m$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = m \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x = t$$

$$t^2 - mt + 1 = 0$$

Are soluții reale: $\Delta \geq 0$

$$m^2 - 4 \geq 0$$

$$m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

a



TG 18 Pentru ce unghi $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ este adevărată relația

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 8 \sin^2 x?$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 8 \sin^2 x$$

$$x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 8 \sin^2 x$$

$$8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$$

$$2(4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) = 1$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x > 0$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$$

$$2x = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{3\pi}{8}$$

e



TG 19 * Să se calculeze $\sin 2x$ dacă $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} - 1$$

$$\sin 2x = -\frac{3}{4}$$

d



TG 20 Să se determine perioada principală a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$.

$\exists T > 0$ astfel încât $f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x+T)$$

$$\sin \frac{\pi x}{2} = \sin \frac{\pi(x+T)}{2}$$

$$\sin \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{\pi(x+T)}{2} = 0$$

$$2 \cos \frac{\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi(x+T)}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi(x+T)}{2}} = 0$$

$$\cos \frac{2\pi x + \pi T}{4} \sin \frac{-\pi T}{4} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin \frac{-\pi T}{4} = 0$$

$$\sin \frac{\pi T}{4} = 0$$

$$\sin \frac{\pi T}{4} = 0$$

$$\frac{\pi T}{4} = k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$T = 4k; k \in \mathbb{Z}$$

$$T = 4$$

c



TG 21 Pentru care din următoarele valori ale parametrului real m egalitatea

$$\cos 4x + (m + 3)(\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0$$

nu este verificată de nici o valoare a unghiului x ?

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x \quad (\sin x + \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \quad \sin 2x = t$$

$$1 - 2t^2 + (m + 3)(1 - t) - 3m - 2 = 0$$

$$-2t^2 + m + 3 - t(m + 3) - 3m - 1 = 0$$

$$-2t^2 - t(m + 3) - 2m + 2 = 0$$

$$2t^2 + t(m + 3) + 2m - 2 = 0$$

$$\Delta = m^2 + 6m + 9 - 16m + 16 = m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2$$

$$t_1 = -2 \notin [-1; 1]$$

$$t_2 = \frac{1 - m}{2} \notin [-1; 1]$$

$$\frac{1 - m}{2} < -1$$

$$\frac{1 - m}{2} > 1$$

$$1 - m < -2$$

$$1 - m > 2$$

$$m > 3$$

$$m < -1$$

$$m \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$$



TG 22 Valoarea raportului $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$ pentru $x = \frac{\pi}{24}$ este:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1} &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x - \cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin^2 x)(\sin^2 x - 1) + (\cos^2 x)(\cos^2 x - 1)} = \\ &= \frac{(\sin^2 x)(\sin^2 x - 1) + (\cos^2 x)(\cos^2 x - 1) - \sin^2 x \cos^2 x}{-\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{-2 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{-3 \sin^2 x \cos^2 x}{-2 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



TG 23 Să se calculeze expresia $E = \frac{\cos 25^\circ + \sin(-5^\circ)}{\sin 25^\circ + \cos 5^\circ}$.

$$\begin{aligned} E &= \frac{\cos 25^\circ + \sin(-5^\circ)}{\sin 25^\circ + \cos 5^\circ} = \frac{\cos 25^\circ - \sin 5^\circ}{\sin 25^\circ + \cos 5^\circ} = \frac{\cos 25^\circ - \cos 85^\circ}{\cos 65^\circ + \cos 5^\circ} = \\ &= \frac{-2 \sin \frac{25^\circ + 85^\circ}{2} \sin \frac{15^\circ - 85^\circ}{2}}{2 \cos \frac{65^\circ + 5^\circ}{2} \cos \frac{65^\circ - 5^\circ}{2}} = \frac{\sin 55^\circ \sin 30^\circ}{\cos 35^\circ \cos 30^\circ} = \frac{\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

b



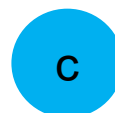
TG 24 Fie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$. Imaginea funcției f este

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = \cos x - \sin x$$

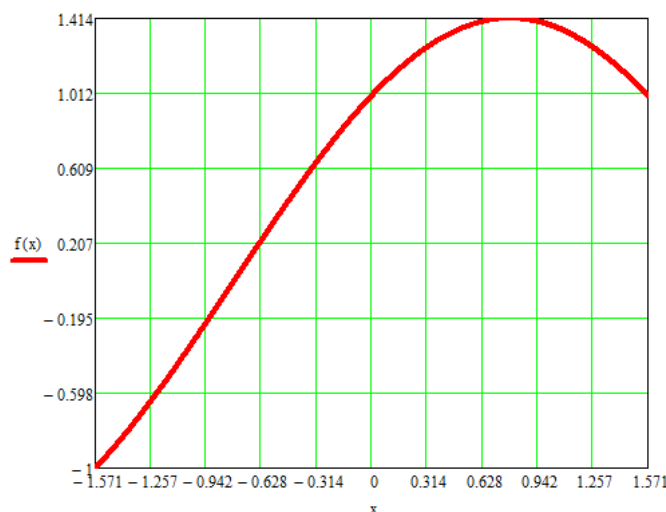
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\max = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{Im } f = (-1; \sqrt{2}]$$



$$f(x) > f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$





TG 25 * Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $2f(x) - f(-x) = 3 \sin x \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Atunci

$$\begin{cases} 2f(x) - f(-x) = 3 \sin x \cos x \\ 2f(-x) - f(x) = -3 \sin x \cos x \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0$$

$$2f(x) - f(-x) = 3 \sin x \cos x$$

$$3f(x) - f(x) - f(-x) = 3 \sin x \cos x$$

$$3f(x) - [f(x) + f(-x)] = 3 \sin x \cos x$$

$$3f(x) = 3 \sin x \cos x$$

$$f(x) = \sin x \cos x$$



TG 26 * Să se calculeze expresia

$$E = \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}$$



TG 27 Știind că $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ și $\sin a + \cos a = \frac{7}{5}$, să se afle $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

$$\sin a + \cos a = \frac{7}{5}$$

$$a \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{a}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in (0; \sqrt{2} - 1)$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t$$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}; \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{7}{5}$$

$$10t + 5 - 5t^2 = 7 + 7t^2$$

$$12t^2 - 10t + 2 = 0$$

$$6t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{nu este soluție}$$

$$t_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$$



$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} = 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = -\sqrt{2} - 1$$

nu este soluție



TG 28 Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a - \sin b = \frac{1}{2}$ și $\cos a + \cos b = \frac{3}{2}$.

Să se calculeze $\cos(a + b)$.

$$\begin{cases} \sin a - \sin b = \frac{1}{2} \\ \cos a + \cos b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 a - 2 \sin a \sin b + \sin^2 b = \frac{1}{4} \\ \cos^2 a + 2 \cos a \cos b + \cos^2 b = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow 1 + 2 \cos(a + b) + 1 = \frac{10}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos(a + b) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(a + b) = \frac{1}{4}$$

c



TG 29 Să se calculeze $\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ}$.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 30^\circ = 2\cos^2 15^\circ - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2\cos^2 15^\circ$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{4}}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$2\sin^2 15^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1}{3 - 1} = \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

c

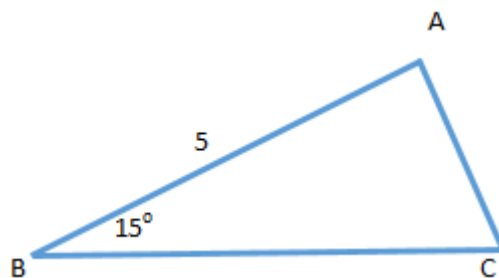


TG 30 Să se calculeze lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC în care $AB = 5$ și măsura unghiului B este 15° .

$$\cos 15^\circ = \frac{5}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{BC}$$

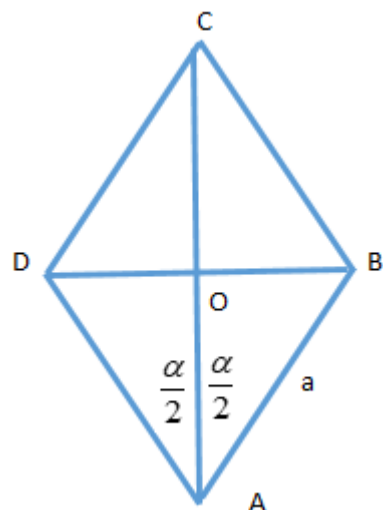
$$BC = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{10\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{10\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} = 5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$



c



TG 31 * Fie $ABCD$ un romb și O intersecția diagonalelor sale. Să se calculeze $\sin(\widehat{BAD})$, știind că $AB + BO = AC$.



$$BO = a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}; AO = a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}; AC = 2a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$AB + BO = AC$$

$$a + a \sin \frac{\alpha}{2} = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

Fie:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = v$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = u$$

$$\begin{cases} 1 + v = 2u \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 2u - 1 \\ u^2 + (2u - 1)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow u^2 + 4u^2 - 4u + 1 = 1 \Rightarrow 5u^2 - 4u = 0$$

$$u = 0 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \pi \quad \text{nu este soluție}$$

$$u = \frac{4}{5} \Rightarrow v = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

a



TG 32 * În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $m(\hat{B}) = 30^\circ$ și $AB = 6$ se înscrie pătratul ce are două vârfuri pe ipotenuză și celelalte două respectiv pe câte o catetă. Să se afle latura pătratului.

$$\cos 30^\circ = \frac{6}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC}$$

$$BC = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{BM}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{BM}$$

$$BM = x\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{NC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{NC}$$

$$NC = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

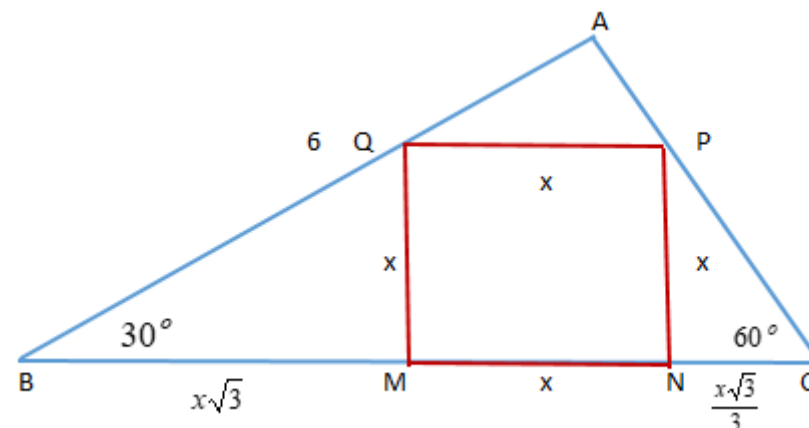
$$x\sqrt{3} + x + \frac{x\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$3x\sqrt{3} + 3x + x\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$x(4\sqrt{3} + 3) = 12\sqrt{3}$$

$$x = \frac{12\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 3} = \frac{12\sqrt{3}(4\sqrt{3} - 3)}{48 - 9} = \frac{12\sqrt{3}(4\sqrt{3} - 3)}{39} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}(4\sqrt{3} - 3)}{13} = \frac{12(4 - \sqrt{3})}{13}$$





TG 33 Un romb are aria 24 și o diagonală de lungime 6. Să se calculeze latura rombului.



TG 34 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{13}$.
Să se calculeze măsura unghiului B .

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3 + 4 - 13}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{6}{4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{B} = 150^\circ$$

f



TG 35 * Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$, $AC = 5$ și unghiul $\widehat{BAC}$ de 60° .
Să se calculeze BC și aria triunghiului.



TG 36 * Aria triunghiului ABC este egală cu 4, iar $AB = BC = 4$. Să se afle valoarea unghiului ascuțit $\widehat{ABC}$.



TG 37 * Să se determine măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC , dacă

$$\operatorname{tg}^2(B + C) + \operatorname{tg}^2 A = 2.$$

$$\operatorname{tg}^2(B + C) + \operatorname{tg}^2 A = 2$$

$$[\operatorname{tg}(\pi - A)]^2 + \operatorname{tg}^2 A = 2$$

$$\left[\frac{\operatorname{tg} \pi - \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg} \pi \cdot \operatorname{tg} A} \right]^2 + \operatorname{tg}^2 A = 2$$

$$\left[\frac{-\operatorname{tg} A}{1} \right]^2 + \operatorname{tg}^2 A = 2$$

$$\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 A = 2$$

$$\operatorname{tg}^2 A = 1$$

$$\operatorname{tg} A = 1$$

$$A = \frac{\pi}{4} \quad \text{c}$$



TG 38 Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AB = 6$ și $m(\widehat{ACB}) = 75^\circ$.

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R \Rightarrow \frac{6}{\sin 75^\circ} = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{\sin 75^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{12}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{12(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

b

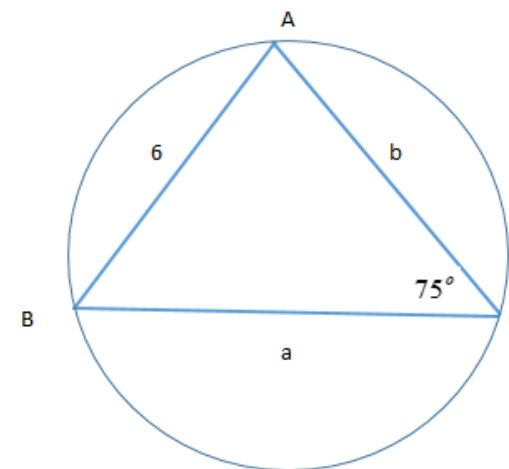
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos 150^\circ = 1 - 2\sin^2 75^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 75^\circ$$

$$2\sin^2 75^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 75^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 75^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$





TG 39 * Aria triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$, măsura unghiului $\widehat{BAC}$ este de 60° , iar $b + c = 7$. Să se determine a .

$$\begin{cases} \frac{bc \sin \alpha}{2} = 2\sqrt{3} \\ b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{bc \sin 60^\circ}{2} = 2\sqrt{3} \\ b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{bc\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \\ b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = 8 \\ b + c = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} bc = 8 \\ b^2 + c^2 + 2bc = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = 8 \\ b^2 + c^2 = 33 \end{cases}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = 33 - 2 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

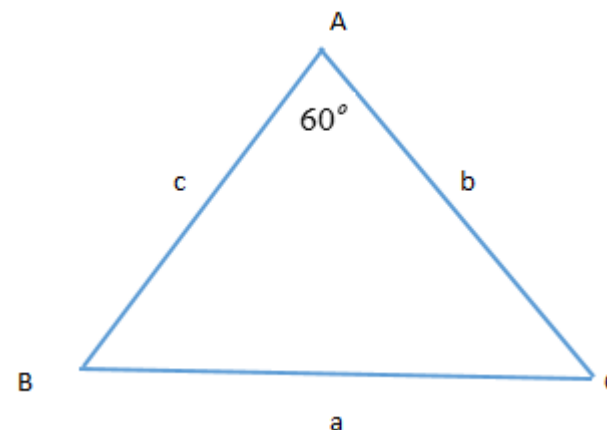
$$a^2 = 33 - 16 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 33 - 8$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

b



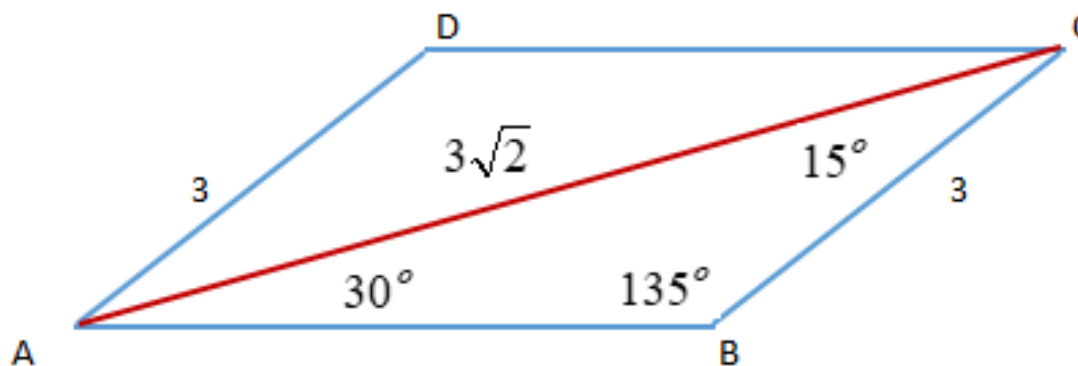


TG 40 În paralelogramul $ABCD$, unghiurile $\widehat{BAC}$ și $\widehat{ABC}$ au respectiv măsurile de 30° și 135° , iar latura $AD = 3$. Să se calculeze lungimea diagonalei AC și aria paralelogramului.

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 135^\circ}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{AC}{\sqrt{2}}$$

$$AC = 3\sqrt{2}$$



$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow 2\sin^2 15^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sin 15^\circ}{2} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8} = \frac{9(\sqrt{12} - 2)}{8} = \frac{9(\sqrt{3} - 1)}{4}$$



TG 41 * Raza cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC este egală cu $\frac{5}{2}$, iar $AC = 3$. Să se calculeze $\operatorname{tg} B$.

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R$$

$$\frac{3}{\sin \beta} = 5$$

$$\sin \beta = \frac{3}{5}$$

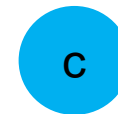
$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{16}{25}$$

$$\cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$





TG 42 * Un romb are aria $2\sqrt{3}$ și un unghi de 120° . Să se calculeze suma lungimilor diagonalelor rombului.

$$BO = x \quad CO^2 = 4x^2 - x^2$$

$$BC = 2x \quad CO^2 = 3x^2$$

$$CO = x\sqrt{3}$$

$$S = 2\sqrt{3}$$

$$S_{BOC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x \cdot x \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = 1$$

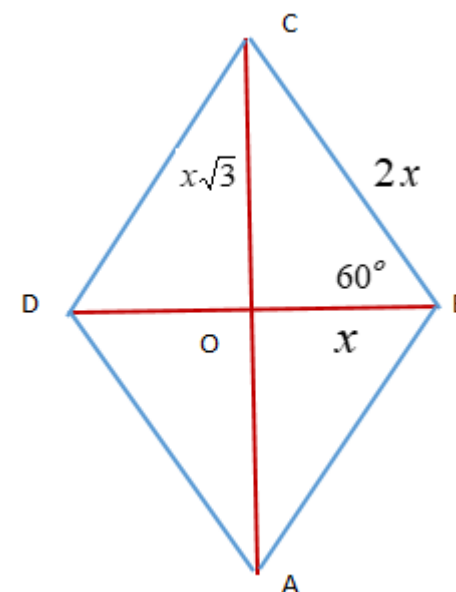
$$x = 1$$

$$BD = 2x = 2$$

$$AC = 2x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$BD + AC = 2 + 2\sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3})$$

C





TG 43 Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC în care $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{7}$ și $C = \frac{\pi}{3}$. Să se calculeze distanța de la G la BC .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$AM^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$28 = 16 + b^2 - 2 \cdot 4 \cdot b \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$AM^2 = 36 + 4 - 12$$

$$AM^2 = 28$$

$$28 = 16 + b^2 - 4b$$

$$AM = 2\sqrt{7}$$

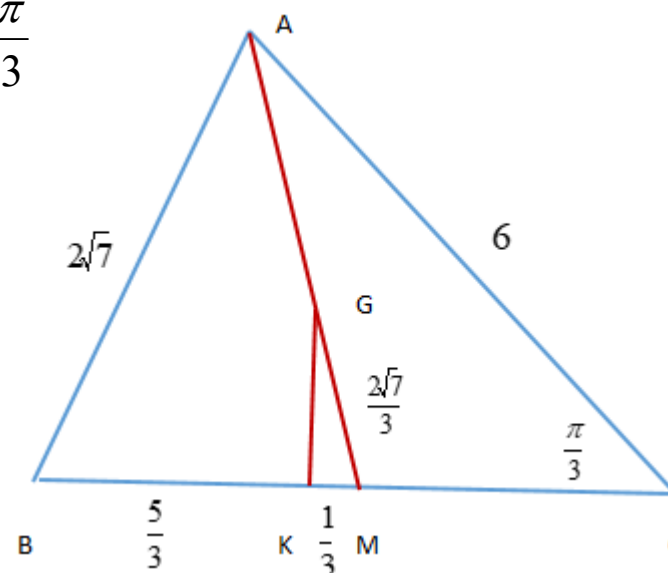
$$b^2 - 4b - 12 = 0$$

$$GM = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$b_1 = 6$$

triunghiul ABM este isoscel

$$b_2 = -2 \text{ nu este soluție}$$



$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 36}{2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{16 + 28 - 36}{16\sqrt{7}} = \frac{8}{16\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$GK^2 = \frac{28}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\cos \hat{GMK} = \cos \beta = \frac{1}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \frac{KM}{\frac{2\sqrt{7}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \Rightarrow KM = \frac{1}{3}$$

$$GK^2 = \frac{27}{9}$$

$$GK = \sqrt{3}$$



TG 44 Fie (OA) și (OB) două raze perpendiculare în cercul de centru O și rază $\sqrt{10}$. Să se calculeze latura pătratului $MNPQ$, unde $Q \in (OA)$, $P \in (OB)$, iar M, N aparțin arcului mic AB .

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{QA}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow QA = y$$

$$AM^2 + QA^2 = QM^2$$

$$AM^2 = x^2 + y^2 - y^2$$

$$AM^2 = x^2 \Rightarrow AM = x$$

$$M(x + y; x) \Rightarrow N(x + y; y)$$

$$\begin{cases} (x + y)^2 + x^2 = 10 \\ (x + y)^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

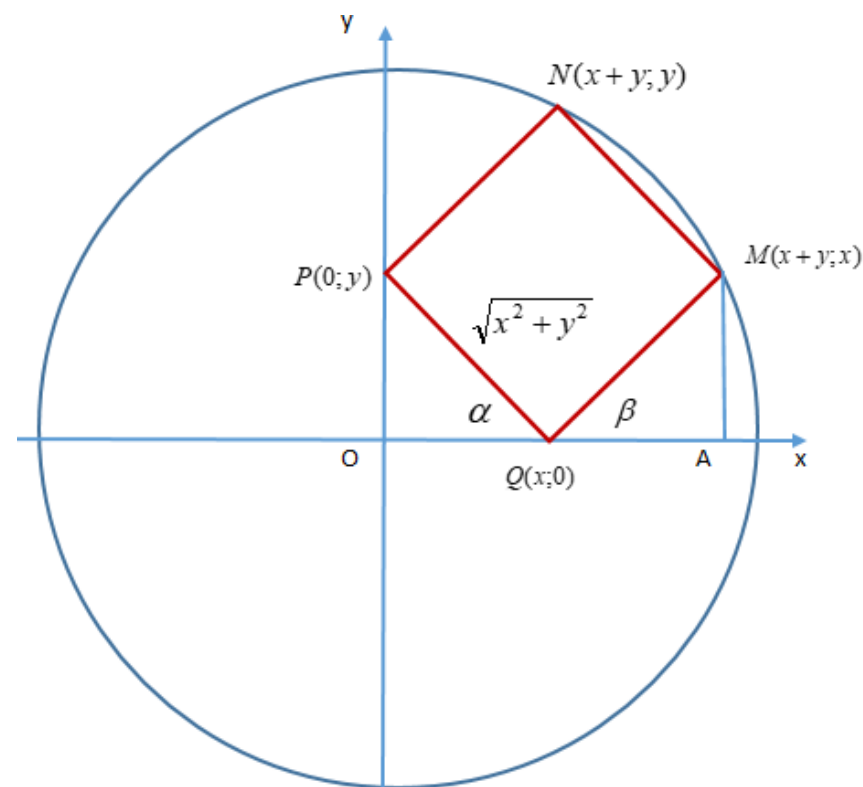
$$(x + x)^2 + x^2 = 10$$

$$4x^2 + x^2 = 10$$

$$5x^2 = 10$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$$



$$PQ = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$$



TG 45 * Se consideră triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{4}$, $m(\hat{B}) = \frac{\pi}{3}$ și $AB = 4$.
Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului.



TG 46 Se consideră triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) > 90^\circ$, $AC = 10$, $AB = 6$, iar aria triunghiului este $15\sqrt{3}$. Să se calculeze lungimea laturii BC .



TG 47 * Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului de laturi 3, 7, 8.



TG 48 Să se calculeze lungimea laturii c a triunghiului ABC , știind că $a = 4$, $c = b\sqrt{3}$ și $m(\hat{C}) = 2m(\hat{B})$.



TG 49 * Să se calculeze aria triunghiului ABC , știind că $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$ și $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{4}$.



TG 50 * Să se calculeze lungimea înălțimii h_B a triunghiului ABC , știind că $b = c = 1$ și $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = \frac{\pi}{8}$.
